S2 B4 Correction Examen EV

Exercice 1 : sev ou pas

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0 \text{ et } y - z^2 = 0\}$.

   Prenons $u = (1, 1, 1)$. On a $u \in E$. Or $2.u = (2, 2, 2) \notin E$ car $2 - 2^2 = -2 \neq 0$. La multiplication externe n'est pas stable dans E. Donc E n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n\}$.

   $F = \text{Vect}((2^n), (3^n))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. F est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 : bases ou pas

On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère les familles suivantes :

$$\mathcal{F}_1 = (u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (1, -2, 1), u_3 = (-1, 3, 0)) \text{ et } \mathcal{F}_2 = (v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 1), v_3 = (2, 3, 2))$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

• Pour $\mathcal{F}_1$, on remarque que $u_1 - 2u_2 = u_3$, la famille est liée. $\mathcal{F}_1$ n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.

• Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 0 \quad (L_1) \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \quad (L_2) \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \quad (L_3) \end{cases}$$

$L_2 - L_1$ donne $\gamma = 0$ et $L_3 - L_1$ donne $-\beta = 0$. Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. $\mathcal{F}_2$ est donc une famille libre.

Or $\text{Card}(\mathcal{F}_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc $\mathcal{F}_2$ libre $\implies$ $\mathcal{F}_2$ génératrice de $\mathbb{R}^3$.

$\mathcal{F}_2$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 : coordonnées

1. *On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la base $\mathcal{B} = (P_1 = 1 - X, P_2 = 1 + X, P_3 = (1 + X)^2)$ de E.*

   (a) *Soit $P \in E$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 2, -1)$. Trouver les coordonnées de P dans la base canonique de E.*

   On a $P = 1P_1 + 2P_2 - 1P_3 = 1 - X + 2(1 + X) - (1 + X)^2 = 1 - X + 2 + 2X - 1 - 2X - X^2 = 2 - X - X^2$.

   Les coordonnées de P dans la base canonique de E sont donc $(2, -1, -1)$.

   (b) *Soit $Q = 2X^2 + 1$. Donner les coordonnées de Q d'une part dans la base canonique de E, d'autre part, dans $\mathcal{B}$.*

   • Les coordonnées de Q dans la base canonique de E sont $(1, 0, 2)$.

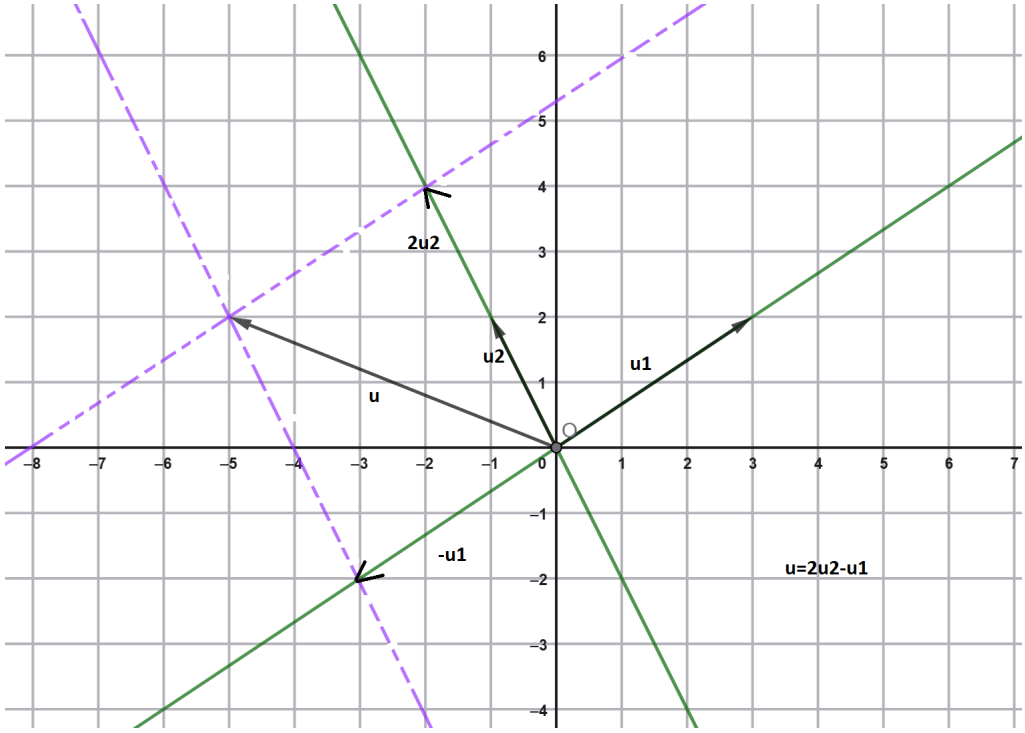
   • Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 2X^2 + 1$. En remplaçant et après développement, on a $\alpha - \alpha X + \beta + \beta X + \gamma + 2\gamma X + \gamma X^2 = 2X^2 + 1$. Or deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients sont égaux. On en déduit que

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ \gamma &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= -4 \\ \gamma &= 2 \end{cases} \iff \alpha = \frac{3}{2},\ \beta = -\frac{5}{2},\ \gamma = 2$$

   Ainsi, les coordonnées de Q dans la base $\mathcal{B}$ sont $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 2\right)$.

2. *Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère la base $\mathcal{B} = (u_1 = (3,2), u_2 = (-1,2))$.*

   (a) *Ci dessous, dessiner les deux repères (avec 2 carreaux = 1 unité) formés d'une part, par la base canonique de $\mathbb{R}^2$, d'autre part, par $\mathcal{B}$. Soit $u = (-5,2)$. Trouver graphiquement les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.* ***Vous ferez apparaitre vos traits de construction.***



Graphiquement, les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ sont : $(-1,2)$

   (b) *Vérifier par le calcul ce que vous avez trouvé dans la question précédente.*

$-u_1 + 2u_2 = -(3,2) + 2(-1,2) = (-3-2, -2+4) = (-5,2)$.

Exercice 4 : sev engendrés

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \text{Vect}(X^2 + X) \text{ et } G = \text{Vect}(X^2, X)$$

1. *Donner un vecteur appartenant à F et un vecteur n'appartenant pas à F. Ne pas justifier.*

   $P = 2(X^2 + X) \in F$ et $Q = 2X^2 + 3X \notin F$.

2. *Donner un vecteur appartenant à G et un vecteur n'appartenant pas à G. Ne pas justifier.*

   $Q = 2X^2 + 3X \in G$ et $R = 2X^2 + 3X + 2 \notin G$.

3. *A t-on $F \subset G$? $G \subset F$?*

   • Comme $Q \in G$ et $Q \notin F$, on a $G \not\subset F$.

   • Soit $P \in F$. Alors, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha(X^2 + X)$. Ainsi, $P = \alpha X^2 + \alpha X$ d'où $P \in G$. Cela montre que $F \subset G$.

4. *Trouver la dimension de F et la dimension de G.*

   • Par définition, $(X^2 + X)$ est une famille génératrice de F. Or ce polynôme n'étant pas nul, il constitue une famille libre.

   Ainsi, $(X^2 + X)$ est une base de F. Donc, $\dim(F) = 1$.

   • Par définition, (X^2, X) est une famille génératrice de G. Or ces deux polynômes ne sont pas colinéaires, ils constituent une famille libre.

   Ainsi, (X^2, X) est une base de G. Donc, $\dim(G) = 2$.

Exercice 5 : sev supplémentaires ?

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. On considère les deux sous-espaces vectoriels :

- *F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1)$ et $u_2 = (-2, -4, 2)$.*
- *$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y = 0\}$.*

1. *Trouver rigoureusement une base de F. En déduire la dimension de F.*

   $F = \text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(u_1)$ car $u_2 = -2u_1$. Ainsi, (u_1) est une famille génératrice de F.

   De plus, $u_1 \neq 0_E \implies (u_1)$ est une famille libre.

   (u_1) est donc une base de F et $\dim(F) = 1$.

2. *Trouver rigoureusement une base de G. En déduire la dimension de G.*

   On a $G = \{(x, -2x, z),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, -2, 0) + z(0, 0, 1),\ (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\,(v_1 = (1, -2, 0), v_2 = (0, 0, 1))$.

   Ainsi, (v_1, v_2) est une famille génératrice de G.

   Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, la famille (v_1, v_2) est libre. (v_1, v_2) est donc une base de G et $\dim(G) = 2$.

3. *Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.*

   Soit $u \in F \cap G$. On a $u \in F$ et $u \in G$. Or $u \in F \implies \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, u = \alpha u_1 = (\alpha, 2\alpha, -\alpha)$. Puisque $u_1 \in G$, on a alors $2\alpha + 2\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$. Ainsi, $u = 0_E$ et on a montré : $F \cap G \subset \{0_E\}$. Or, $F \cap G$ étant un sev de E, $\{0_E\} \subset F \cap G$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

4. *Rappeler la définition de $F \oplus G = E$. Est-ce le cas ici ?*

   On sait que $F \oplus G = E \iff (E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\})$.

   On sait déjà que $F \cap G = \{0_E\}$.

   De plus, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 1 + 2 - 0 = 3$. Ainsi, $F + G \subset E$ et $\dim(F + G) = \dim(E)$. Donc $E = F + G$.

   On a bien ici $F \oplus G = E$.

5. *Proposer F' sous-espace vectoriel de E tel que $F' \cap G \neq \{0_E\}$ mais $F' + G = E$. Vous préciserez ce que représente géométriquement F' mais ne pas justifier votre choix.*

   Il faut que F' soit un plan vectoriel (différent de G). On peut prendre par exemple $F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\}$.

6. *Proposer H sous-espace vectoriel de E tel que $H \cap F = \{0_E\}$ mais $H + F \neq E$. Vous préciserez ce que représente géométriquement H mais ne pas justifier votre choix.*

   Il faut que H soit une droite vectorielle. On peut prendre par exemple $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y = 0\}$.